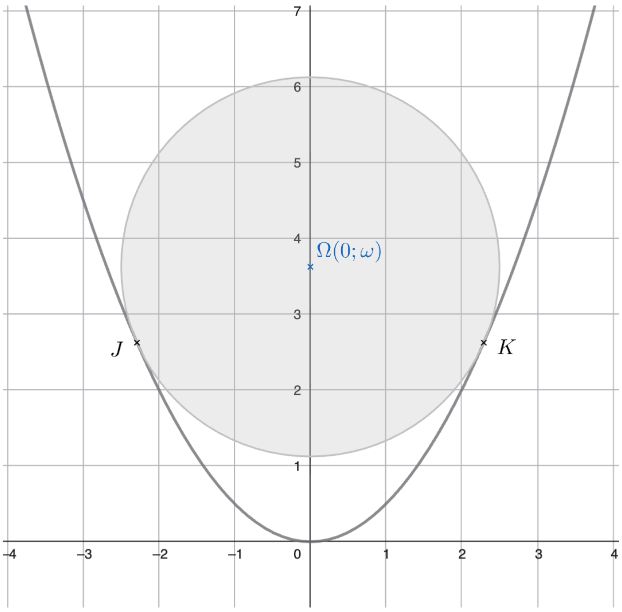
## Correction du problème : la boule de glace

Plaçons-nous dans une coupe verticale.
La coupe est modélisée par la parabole d'équation $y = \frac{1}{2}x^2$
La boule de glace est modélisée par le cercle de centre $\Omega(0;\omega)$ et de rayon $R = \frac{5}{2}$, donc d'équation $x^2 + (y-\omega)^2 = \frac{25}{4}$
Lorsque la boule est posée dans la coupe, il apparait deux points de contact I et K qui sont des points où les deux courbes sont tangentes.




Par symétrie de notre problème, ces deux points d'intersection ont la même ordonnée et des abscisses opposées en signes.
Le problème revient donc à résoudre le système suivant et à l'obliger à n'avoir que deux solutions :

$$\begin{cases} x^2 + (y-\omega)^2 = \frac{25}{4} \\ y = \frac{1}{2}x^2 \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} x^2 + (y-\omega)^2 = \frac{25}{4} \\ 2y = x^2 \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} 2y + (y-\omega)^2 = \frac{25}{4} \\ 2y = x^2 \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} 2y + y^2 - 2y\omega + \omega^2 = \frac{25}{4} \\ 2y = x^2 \end{cases}$$

$$\text{ssi} \quad \begin{cases} y^2 + 2(1-\omega)y + \omega^2 - \frac{25}{4} \\ 2y = x^2 \end{cases}$$

Calculons le discriminant de la première équation :

$$\Delta = 4(1-\omega)^2 - 4\left(\omega^2 - \frac{25}{4}\right) = 4(1 - 2\omega + \omega^2) - 4\omega^2 + 25 = 29 - 8\omega$$

Or cette équation n'admettra qu'une unique solution si et seulement si $\Delta = 0$, c'est à dire pour $\omega = \frac{29}{8}$